

有限角度 CT 重建方法

CT Reconstruction for Limited Angle

大连理工大学信息与通信学院 李 镜

西安光学与精密仪器研究所 卢孝强 孙 怡

[摘要] 计算机断层成像技术(Computed Tomography, CT)技术已经被广泛应用于医学诊断、工业无损探伤以及安全检查等领域。然而在实际应用中,很多情况下并不能采集到完全角度下的投影数据,例如成像系统设计的限制等。利用有限角度下的投影数据进行图像重建被称为X射线成像有限角度重建。本文介绍了两种有限角度CT迭代重建方法,并对其重建结果进行了比较和评价。

关键词: X射线 图像重建

[ABSTRACT] Computed Tomography (CT) has made a revolutionary impact on medical diagnosis and industrial non-destructive testing. However, it is not always possible to acquire projection data through a complete CT angular range in some real applications, such as imaging system design constraints. The conventional and most commonly used method for reconstruction from tomographic projections is the analytical reconstruction technique which is not so adaptable to incomplete projection data and results in poor reconstructions with severe artifacts in limited angle cases. Two reconstruction algorithms for limited angle cases are illustrated and the performance of algorithms is shown.

Keywords: X-ray Image reconstruction

近几年来,航空领域多次发生因疲劳裂纹未能及时发现而造成的重大空难事故。据美国空军材料实验室(AFML)统计,由疲劳裂纹引起的航空发动机转子破坏占整个航空发动机的事故比例超过74%。其中,转动部件疲劳断裂是航空发动机最主要的失效形式^[1]。因此,航空构件服役过程中疲劳裂纹扩展的检测与分析一直是飞行器安检的重要组成部分。计算机断层成像技术(Computed Tomography, CT)现在已被广泛应用于医学诊断、工业无损检测以及安全检查等领域。CT技术是通过物体进行不同角度下的射线投影测量而获取物体横截面信息的成像技术,已经证明,由完全投影数据可以唯一重建图像^[2],而实际服役工件尺寸大使得很难

得到该部件的全部投影。若要将这些部件拆卸下来再行检测,则十分费时费力,况且反复的拆卸也容易导致新的安全隐患。因此,研究不完全投影情况下的CT图像重建算法对于飞行器部件的安全检测具有十分重要的实用价值。

不完全数据成像中,大部分都涉及到有限角度图像重建的问题。如果扫描角度小于180°则对其投影数据的重建就属于有限角度重建。现有的CT重建算法主要包括解析重建法和迭代重建法两类。滤波反投影重建算法就属于第一类,其理论基础是中心切片定理,但是由于上述算法本身的非局部性,不适合有限角度CT重建;迭代重建法中比较经典的算法是ART(Algebraic Reconstruction Techniques)算法^[3],该类算法可以提高图像的重建质量,同时也降低了成像速度。X. Pan等人在文献[4]中提出利用一种基于自适应的最速下降和凸集投影约束相结合的算法(ASD-POCS)来求解带有约束的最小化问题。ASD-POCS算法在使最速下降法的迭代步长跟重建图像的变化量成正比例的基础上建立起TV梯度下降迭代和凸集投影约束迭代相结合的平衡系统。而且ASD-POCS算法能够满足待重建图像所对应的投影数据和真实投影数据之间的误差在一个可容许的范围内,并能保证所求的待重建图像具有非负的像素值。在先前的工作中,我们提出了两种有限角度CT重建迭代方法,即基于乘性正则化方法的有限角度重建方法^[5]和基于双约束目标函数的有限角度重建法^[6]。本文主要对以上两种方法的重建结果进行比较和评论。

1 有限角度 CT 重建的数学模型

CT重建的数学模型可归结为:

$$p = Rx, \quad (1)$$

其中, p 为测量得到的投影数据, R 为投影系统矩阵, x 为待重建物体。下面说明该式的具体创建过程。

对于待重建物体 x , 其中任一像素 j 对某一射线的投影贡献为^[4]:

$$p_{ij} = r_{ij} x_j, \quad (2)$$

其中, x_j 表示待重建物体的第 j 个像素; p_{ij} 表示像素 j 对射线 i 的射线投影贡献; r_{ij} 表示像素 j 对射线 i 的权重贡献, 由于像素只对穿过该像素的射线有影响, 因此, r_{ij} 的定义如下:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{射线 } i \text{ 通过像素 } j \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad (3)$$

射线 i 还经过其他像素, 而投影值是所有像素的总和; 因此, 射线 i 的投影值为

$$p_i = \sum_j p_{ij} = \sum_j r_{ij} x_j, \quad (4)$$

p_i 为射线 i 穿过物体后在探测器上得到的投影值。

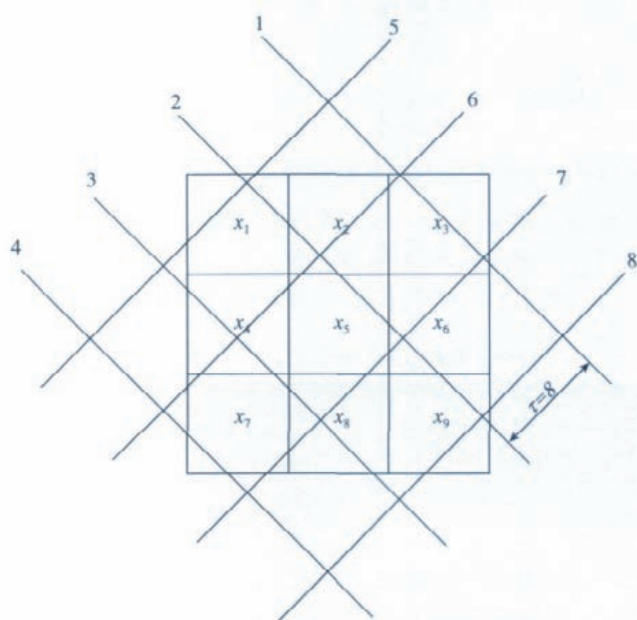


图1 求3×3像素图像的射线投影
Fig.1 CT data acquisition for 3×3 image

下面的例子直观地说明了上述过程。

图1为3×3像素的图像。 x_1, x_2, \dots, x_9 为相应的像素值, 1~8表示8条射线。由图1可见各投影值为:

$$\begin{cases} p_1 = r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + \dots + r_{19}x_9 = x_3 \\ p_2 = r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + \dots + r_{29}x_9 = x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_9 \\ p_3 = r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + \dots + r_{39}x_9 = x_1 + x_4 + x_5 + x_8 + x_9 \\ p_4 = r_{41}x_1 + r_{42}x_2 + \dots + r_{49}x_9 = x_7 \\ p_5 = r_{51}x_1 + r_{52}x_2 + \dots + r_{59}x_9 = x_1 + x_2 \\ p_6 = r_{61}x_1 + r_{62}x_2 + \dots + r_{69}x_9 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ p_7 = r_{71}x_1 + r_{72}x_2 + \dots + r_{79}x_9 = x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \\ p_8 = r_{81}x_1 + r_{82}x_2 + \dots + r_{89}x_9 = x_9 \end{cases}, \quad (5)$$

上式可写成更简洁的形式:

$$p_i = \sum_{j=1}^9 r_{ij} x_j \quad i = 1, 2, \dots, 8, \quad (6)$$

或用矩阵表示为:

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{x}, \quad (7)$$

式中:

$$\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_8]^T, \quad (8)$$

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_9]^T, \quad (9)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{19} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{29} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{81} & r_{82} & \dots & r_{89} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

把它们推广到 J 个像素 I 条射线的一般情况。此时: \mathbf{x} 为 J 维矢量, 称图像矢量; \mathbf{p} 为 I 维矢量, 称测量矢量; \mathbf{R} 为 $I \times J$ 维矩阵, 称投影系统矩阵。

在有限角度 CT 图像重建中, 投影数据的个数 I 一般远小于未知像素数 J 。从数学角度来分析, 该类重建问题相当于求解一个欠定的代数方程组, 属于不适定问题研究范畴。因此, 在有限角度下重建图像的困难在于:

(1) 一般像素数目 J 及射线数目 I 都极大, 在迭代过程中运算量很大。

(2) 在很多情况下投影数据的个数 I 远小于未知像素数 J , 式(7)是个欠定方程, 于是有无穷多个解。

(3) 实际情况下, 测量误差不可避免, 噪声影响也不可忽视。于是, 式(7)所示方程可能无解。这时必须计及误差, 并估计一组解, 使它在某一最优准则下达到最佳。故对式(7)作如下修正:

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{e}, \quad (11)$$

这里, \mathbf{e} 为误差矢量。

因此, 在有限角度下重建图像问题可归结为: 根据有限角度下获得的带有噪声的测量矢量 \mathbf{p} , 利用式(11)估计图像矢量 \mathbf{x} 。

2 基于乘性正则化方法的有限角度重建

有限角度 CT 重建属于不完全数据的重建问题。从数学角度来看, 可归结为对一个欠定的代数方程组的求解问题, 它属于不适定问题。为了得到比较满意的重建结果, 重建过程中一般需要引入惩罚项来处理。最近 10 年, 通过在最小化函数中加入总变分惩罚项来处理有限角度重建问题越来越引起广大科研工作者的兴趣。这是由于总变分惩罚项能重建出具有良好边缘的图像^[22]。我们希望通过引入乘性 TV 约束, 从而能自适应调整 TV 范数项的惩罚力度来在总变分最小约束和数据一致性约束之间建立起平衡。

乘性 TV 约束:

$$\arg \min C(\mathbf{x}) = \arg \min F(\mathbf{x}) F^{TV}(\mathbf{x}), \quad (12)$$

数据一致性约束:

$$\|\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \leq \xi, \quad (13)$$

非负约束:

$$x \geq 0. \quad (14)$$

其中权值函数 $F(x) = \eta \|R_x - p\|_2^2$ ($\xi \neq 0$), 归一化参数 $\eta = \|p\|_2^{-2}$, TV 正则化因子 F^{TV} 定义为:

$$F^{TV}(x) = \|x\|_{TV} = \sum_{s,t} \sqrt{(x_{s,t} - x_{s-1,t})^2 + (x_{s,t} - x_{s,t-1})^2} + \delta, \quad (15)$$

其中引入正实参数 δ 主要是防止对 $F^{TV}(x)$ 求导运算时出现分母为零, 从而消除了对图像像素做梯度运算时出现的奇异性。

3 基于双约束目标函数的有限角度重建

基于最小化 TV 双约束的求解模型如下:

$$z = \arg \min (z-u)^T \nabla M(u) + \frac{1}{2} \lambda \|z-u\|_2^2, \quad (16)$$

$$u = \arg \min \frac{1}{2} \|z-u\|_2^2 + \eta \|z\|_{TV}, \quad (17)$$

其中 $M(u) = \frac{1}{2} \|Ku - p\|_2^2$, ∇ 为梯度算子, λ 、 η 为正则化参数, 它们在所求解的重建结果和中间变量之间起到了重要的平衡作用, $\|z\|_{TV} = \sum_{s,t} |\nabla z_{s,t}|$, 其中 s 和 t 为重建图像的离散灰度值的位置, 中间变量 z 用来表示重建过程中图像中间结果。

4 试验结果分析结论

4.1 模拟试验结果

我们以经典的 Shepp-Logan 头模型作为研究对象, 来比较本文介绍的两种算法的重建结果。假设模拟投影数据是通过方程 (7) 产生, 即投影模拟数据的产生是待重建物体的线积分。也就是说把待重建物体看成是由分段连续函数所组成的, 这时所计算的投影模拟数据是由分段积分的和所组成的。在这种情况下, 离散图像的像素跟投影系统矩阵并不一一对应, 因而找不到一个图像 x 能够满足系统数据模型 $R_x = p$ 。在这种条件下来验证本文方法更能体现出本算法的有效性和鲁棒性。在第二组试验中, 所用的投影数据是在中国高能物理研究所实验室采集的。通过使用真实的投影数据来验证本文方法更能反映出本方法的实用性。在利用模拟的投影数据进行重建 128×128 二维物体过程中, 扇束 CT 扫描几何结构的主要成像参数选取如下:

- 探测器的像元大小为 0.50647 mm;
- 待重建物体的象素大小为 0.3125 mm;
- 射线源到探测器中心距离 400 mm;
- 增强器直径长度 140mm;
- 射线源到探测器中心距离 800 mm。

重建结果如图 2 所示。

我们使用均方误差来对重建图像的质量进行评价。

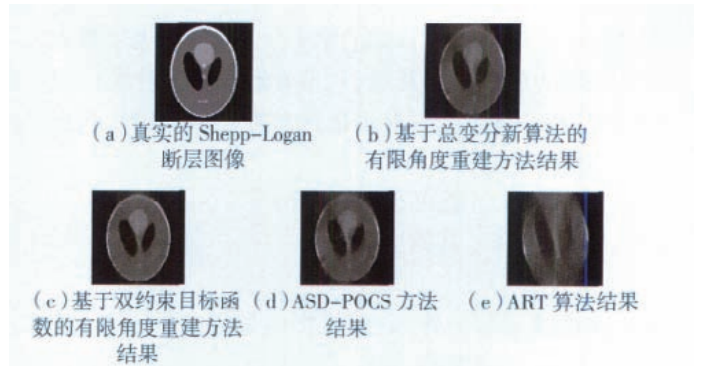


图2 不同算法重建Shepp-Logan断层图像的结果
Fig.2 Shepp-Logan image reconstruction with noisy projections which are available in angular range

归一化均方误差的定义如下:

$$MSE = \frac{\sum_i \sum_j (\tilde{x}_{ij} - x_{ij})^2}{\sum_i \sum_j x_{ij}^2}, \quad (18)$$

其中, x_{ij} 表示真实图像某点的灰度值, \tilde{x}_{ij} 表示重建图像中对应点的灰度值。利用该误差函数 (2.34) 对重建结果进行评价, 评价结果如表 1 所示。

从表 1 中可以看出, 本文介绍的两种算法都要优于

表1 重建结果的MSE值比较

ADS-POCS 算法的重建误差	ART 算法的重建误差	基于总变分新算法的有限角度重建	基于双约束目标函数的有限角度重建
0.1647	0.1857	0.1270	0.1086

ART 和 ASD-POCS 算法。

4.2 实际试验

在第二组试验中, 所用的投影数据是在中国高能物理研究所实验室采集的。投影数据进行重建的过程中,

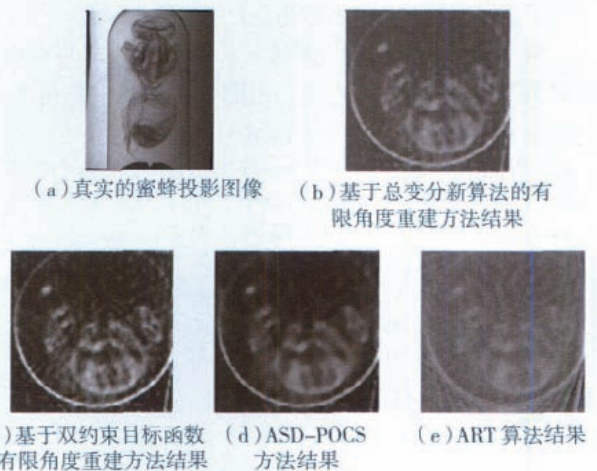
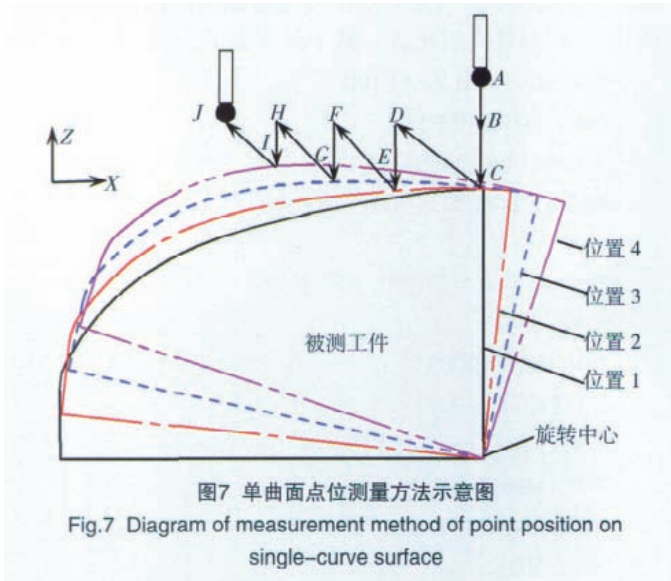


图3 不同算法重建真实蜜蜂断层图像的结果
Fig.3 Reconstructed images of real bee phantom

(下转第 82 页)

3 单曲面构件法向孔位置测量原理

在该复合材料构件单曲面蒙皮上法向制孔时,其在专用夹具上装夹定位如图 5 所示。在单曲面不同位置处制孔时,夹具上台面需带动工件绕旋转中心有



$\pm 5^\circ$ 的摆动,数控摆动夹具和三轴联动机床本体构成一个四轴三联动的数控装备,以实现单曲面的法向制孔。

工件旋转点位测量方测量过程示意图如图 7 所示。曲面法向制孔位置的测量需和曲面法向制孔操作保持一致,只允许机床带动测头(刀具)沿 Z 向下做直线运动。在 2 个孔加工中间,工件需绕旋转中心转动将曲面转动到制孔处法矢沿 Z 轴方向。

单曲面法向制孔位置测量在于通过用微平面法求得曲面预制孔处法矢方向判断工件旋转是否到位,进而测量得到曲面制孔位置坐标信息。以图 7 中曲面制孔处 C 点为例,在测得 C 点坐标值后,再在测量点 C 周围附近再测量 2 个点,3 个点组成一个微平面,用其法矢来代替曲面上 C 点法矢^[7]。当求得法矢与 Z 轴正向夹角小于允许值时,即可记录下当前 C 点的坐标值;然后转动夹具,同理可求得一系列曲面制孔位置信息,将其传输到数控系统中,修改已有制孔 NC 代码程序。测量完成后将测头换成制孔刀具装在机床刀柄上,机床部件执行制孔程序沿规划好的刀具轨迹运动,即可完成曲面上的一系列位置处的法向制孔。

4 结束语

本课题对飞机某复合材料构件共固化成型后工字梁存在的位置随机偏差和加工时存在的机床定位误差、单曲面法向制孔位置在线测量进行了研究,给出了

工字梁位置偏差测量原理、单曲面法向孔位置测量原理,建立了工字梁位置偏差数学模型,编制了数控制孔程序,初步试验结果验证了提出的制孔修正方法的正确性。

参考文献

- [1] Gibson R F . A review of recent research on mechanics of multifunctional composite materials and structures . Composite Structures, 2010, 92(12): 2793-2810.
- [2] 杜善义 . 先进复合材料与航空航天 . 复合材料学报, 2007, 24(1):1-12.
- [3] 鲍永杰 . C/E 复合材料制孔缺陷成因与高效制孔技术 [D]. 大连: 大连理工大学, 2010.
- [4] 郭洪杰 . 大型飞机柔性装配技术 . 航空制造技术, 2010(18):52-54.
- [5] 隋少春, 楚王伟, 李卫东 . 数控加工在线测量技术应用探讨 . 航空制造技术, 2010(22):44-46.
- [6] 唐文杰 . 数控加工精度在线检测技术研究与应用 [D]. 北京: 清华大学, 2009.
- [7] Duan X G, Xu Y, Wang X N, et al. Application of on-line inspection probe of machining center in free curve inspecting. Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation. Chongqing, 2008.

(责编 良辰)

(上接第 78 页)

主要参数选取如下:射线源到物体转轴中心距离 4310 mm,射线源到探测器中心距离 4350 mm,在 90° 角度范围内选取间隔为 1° 的投影数据进行重建。重建结果如图 3 所示。

5 结论

本文比较了两种新算法与经典的 ART 和 ASD-POCS 算法在有限角度下的重建结果,模拟数据表明,这两种算法均优于传统的 ART 与 ASD-POCS 算法。

参考文献

- [1] 敖波, 张小海, 李春阳, 等 . 疲劳裂纹扩展高分辨率 CT 分析新进展 . CT 理论与应用研究, 2010, 19(2): 35-41.
- [2] Deans S R. The Radon Transform and Some of Its Applications. New York: John Wiley, 1983.
- [3] Gordon R, Bender R, Herman G T. Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography. J Theor. Biol., 1970, 29:471-481.
- [4] Sidky E Y, Kao C M, Pan X C. Accurate image reconstruction from few-views and limited angle data in divergent beam CT . J.X-Ray Sci. Technol., 2006, 14(6):119-139.
- [5] Lu Xiaoqiang, Sun Yi, Yuan Yuan. Image reconstruction by an alternating minimisation. Neurocomputing. 2011(74):661-670.
- [6] Lu Xiaoqiang, Sun Yi, Yuan Yuan. Optimization for limited angle tomography in medical image processing. Pattern Recognition. 2011(44):2427-2435.

(责编 三丰)